REALE ISTITUTO LOMBARDO DI SCIENZE E LETTERE
Estratto dai *Rendiconti* Scienze — Vol. LXXIV - Fasc. I — 1940-41.

SEMPLICE DEDUZIONE SINTETICA DELLE PROPRIETÀ METRICHE DI UNA NOTEVOLE CUBICA PIANA

Nota di CARLO FELICE MANARA

ULRICO HOEPLI
Libraio del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere

MILANO
1940 - 41 – Anno XIX

SEMPLICE DEDUZIONE SINTETICA DELLE PROPRIETÀ METRICHE DI UNA NOTEVOLE CUBICA PIANA

Nota di CARLO FELICE MANARA

(Adunanza del 5 dicembre 1940, XIX)

Sunto. — Si dimostra per via sintetica la notevole relazione che caratterizza la g_3^2 secata dalle rette del piano su una cubica le cui tangenti nodali siano le rette isotrope. Si mette in luce l'analogia della relazione trovata con quella che esprime il Teorema di Abel per le curve ellittiche generali.

1°. — Si consideri una cubica piana razionale dotata di un nodo N. È noto che, essendo le rette del fascio N unisecanti della curva, la rappresentazione parametrica dei punti di essa si ottiene sfruttando la corrispondenza biunivoca che nasce tra tali punti e le rette che li proiettano da N. Fissato un punto O della curva, le rette del fascio O secano su di essa una g_2^1, serie lineare di coppie di punti, che subordina evidentemente una involuzione sul parametro cui corrispondono razionalmente e biunivocamente i punti della curva: in altre parole le coppie di punti di una qualunque g_2^1 sulla curva vengono proiettate da N secondo involuzioni di coppie di rette.

Se ora osserviamo che, in vicinanza del nodo N, i punti delle coppie di una qualunque g_2^1 secata da un fascio di rette con centro sulla curva stanno ciascuno su di un ramo della curva stessa, concluderemo che:

Le coppie di una qualsiasi g_2^1 secata su di una cubica nodata da un fascio di rette sono proiettate dal nodo secondo una involuzione di rette che scambia tra loro le tangenti nodali, e viceversa ogni involuzione di questo tipo determina sulla curva una g_2^1 di coppie di punti allineati con un punto fisso della curva stessa.

2°. — Da queste brevi premesse seguono facilmente notevoli proprietà di alcune cubiche razionali per le quali la coppia di tangenti nodali sia notevole sotto l'aspetto metrico.

Consideriamo il caso di una cubica C le cui tangenti nel nodo N siano le rette isotrope. Allora le involuzioni del fascio N che proiettano le g_2^1 di coppie di punti allineati con un punto fisso di C, dovendo scambiare tra loro le rette isotrope del fascio, saranno i ribaltamenti di questo.

Fissata nel fascio N un' origine delle anomalie e detta u (P) l'anomalia, contata a partire da tale origine, della retta che da N proietta il punto P della curva, concluderemo che tutte le coppie di punti P P' appartenenti alla stessa g_2^1 verificano la relazione

$$u(\mathrm{P}) + u(\mathrm{P}') \equiv \text{cost.} \qquad (\text{mod. } \pi) \tag{1}$$

Da questa relazione si passa facilmente a quella che lega le terne di punti appartenenti alla g_3^2 secata su C dalla totalità delle rette del piano: siano $A_1\,A_2\,A_3$ e $B_1\,B_2\,B_3$ due terne di punti allineati della C e sia R il terzo punto in cui la retta $A_1\,B_3$ interseca la curva. Allora, appartenendo le coppie $A_2\,A_3$ e RB_3 alla g_2^1 secata su C dal fascio A_1, si avrà

$$u(\mathrm{A}_2) + u(\mathrm{A}_3) \equiv u(\mathrm{R}) + u(\mathrm{B}_3) \qquad (\text{mod. } \pi)$$

ed appartenendo le coppie A_1 R e $B_2\,B_1$ alla g_2^1 secata su C dal fascio B_3 si avrà

$$u(\mathrm{A}_1) + u(\mathrm{R}) \equiv u(\mathrm{B}_1) + u(\mathrm{B}_2) \qquad (\text{mod. } \pi)$$

sommando membro a membro e riducendo

$$u(\mathrm{A}_1) + u(\mathrm{A}_2) + u(\mathrm{A}_3) \equiv u(\mathrm{B}_1) + u(\mathrm{B}_2) + u(\mathrm{B}_3) \quad (\text{mod. } \pi) \tag{2}$$

Ossia

La somma delle anomalie delle rette che proiettano dal nodo una terna di punti allineati della C è, a meno di multipli di π, una costante indipendente dalla particolare retta del piano su cui si trova la terna.

Chiamata k tale costante, ponendo nella (2) $A_1 = A_2 = A_3 = F$ otteniamo immediatamente le anomalie delle rette proiettanti dal nodo i tre flessi della cubica. Esse sono

$$\begin{cases} u(\mathrm{F}_1) \equiv k/3 \\ u(\mathrm{F}_2) \equiv k/3 + \pi/3 \\ u(\mathrm{F}_3) \equiv k/3 + 2\,\pi/3 \end{cases} \qquad (\text{mod. } \pi)$$

Ossia

La C ha tre flessi che sono proiettati dal nodo secondo tre rette le cui anomalie differiscono una dall'altra di $\pi/3$.

Sommando tali anomalie si verifica poi immediatamente che i tre flessi della C sono allineati.

3°. — In una cubica ellittica la g_2^1 secata da un fascio di rette avente il centro sulla curva determina una trasformazione birazionale involutoria della curva in sè stessa che viene chiamata trasformazione di II^a specie. E il prodotto di due od in generale di un numero pari di trasformazione di II^a specie è un altra trasformazione birazionale della curva in sè stessa che viene chiamata di I^a specie. (v. Enriques e Chisini. Teoria Geom. delle equazioni algebriche. Vol. III°, Libro V°, Cap. III°, § 27).

Se vogliamo mantenere le stesse denominazioni anche per le cubiche nodate, ricordando quanto abbiamo detto sopra al n°. 1, chiameremo di II^a specie le trasformazioni di una cubica nodata in sè stesse subordinate dalle involuzioni del fascio N che scambiano tra loro le tangenti nodali e di I^a specie il prodotto di due od in generale di un numero pari di trasformazioni di II^a; ossia le trasformazioni birazionali della curva in sè stessa subordinate dalle proiettività del fascio N che hanno la coppia delle tangenti nodali come coppia di elementi uniti.

L'estensione delle denominazioni appare giustificata dal fatto che anche sulle cubiche nodate le trasformazioni di I^a e di II^a specie godono delle stesse proprietà che hanno sulle cubiche ellittiche (pur non rappresentando, come in quel caso, *tutte* le trasformazioni birazionali che mutino le curve in sè stesse).

Proprietà che, per quanto abbiamo sopra osservato, risultano nel caso delle cubiche nodate, immediata conseguenza delle proprietà delle proiettività tra fasci soprapposti:

Ogni trasformazione di I^a o di II^a specie è determinata da una coppia di punti corrispondenti.

Il prodotto di più trasformazioni di II^a specie è una trasformazione di II^a o di I^a a seconda che il numero dei fattori è dispari o pari.

Ogni trasformazione di II^a specie trasforma una qualunque di I^a nella sua inversa.

Tutte le trasformazioni di I^a specie sono tra loro permutabili e formano un gruppo continuo abeliano di operazioni che si possono considerare come potenze, ad esponente in generale complesso, di una qualunque tra esse.

Quindi fissato un punto P di una cubica ed una generica trasformazione di I^a specie σ della curva in sè stessa, le coordinate di un qualunque punto P' della curva risultano funzioni uniformi di un parametro k, in generale complesso, esponente di quella potenza di σ che porta P in P'.

La ricerca della espressione analitica esplicita dell'esponente k in funzione dei punti P P' conduce, nel caso di una cubica ellittica, a scrivere l'integrale ellittico di I^a specie relativo alla cubica stessa; ne segue che la teoria di tale integrale si può interamente far dipendere dalla teoria delle trasformazioni birazionali della cubica ellittica in sè stessa (v. Chisini, Rend. Ist. Lomb., giugno 1926).

Nel caso razionale, e precisamente nel caso notevole dal punto di vista metrico che abbiamo considerato, le trasformazioni di I^a specie vengono subordinate sulla C dalle rotazioni del fascio N e quelle di II^a specie dai suoi ribaltamenti, e risultano a prima vista soddisfatte le proprietà delle trasformazioni delle due specie che abbiamo sopra enunciate.

La trasformazione di I^a specie e quella di II^a che portano un punto P della curva in un punto P' vengono date rispettivamente dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} u(P') \equiv u(P) + \text{cost.} & (\text{mod. } \pi) \\ u(P) + u(P') \equiv \text{cost.} & (\text{mod. } \pi) \end{cases}$$

Lo studio delle trasformazioni di I^a specie, in questo caso rotazioni del fascio N, conduce a considerare una funzione semplicemente periodica del punto della curva: l'anomalia della retta che lo proietta da N. Funzione per cui abbiamo visto valere la (2) che ricorda molto da vicino il teor. di Abel per l'integrale ellittico di I^a specie relativo ad una cubica ellittica generale.

Anzi, se pensiamo di aver ottenuto la nostra notevole cubica razionale facendo acquistare un punto doppio con determinate tangenti nodali ad una cubica ellittica generale, possiamo dire che l'integrale ellittico relativo a quest'ultima è degenerato in una funzione semplicemente periodica per cui vale ancora il teor. di Abel nella forma particolarmente semplice data dalla (2).

Premiata Tipografia Successori FUSI — Pavia, Via L. Spallanzani 11 - 1941